ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH THỊ THU HÀ

SỐ ĐA GIÁC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH THỊ THU HÀ

SỐ ĐA GIÁC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Các số tượng hình (figurate numbers) cũng như hầu hết các số đặc biệt khác có lịch sử lâu đời và phong phú. Các số tượng hình đã được giới thiệu vào khoảng thế kỷ thứ VI trước công nguyên như một nỗ lực gắn kết Hình học với Số học. Những nhà toán học thời kỳ Pythagore đã xem xét một số nguyên dương bất kỳ như là tập các điểm trên mặt phẳng và các số tượng hình là số có thể biểu thị bởi một một hình đều: số đa giác là các số biểu thị bởi các đa giác đều, số đa diện là số biểu thị bởi các đa diện đều, ... Lý thuyết các số tượng hình không chỉ thể hiện vẻ đẹp của toán học mà thâm nhập vào nhiều nghiên cứu trong toán học, đặc biệt là số học và được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu (Pythagoras, Hypsicles, Plutarch, Nicomachus, Theon, Diophantus, Fibonacci, Stifel, Cardano, Descartes, Pell, Pascal, Euler, Legendre, Gauss, ...).

Luận văn tìm hiểu về số đa giác, số đa diện và một số bài toán liên quan. Tài liệu chính của luận văn là cuốn sách "Figure Numbers" của E. Deza, M.M. Deza và hai bài báo "A short proof of Cauchy's polygonal number theorem" của M. B. Nathanson; "Sum of squares of polygonal numbers" của A. Gnanam, B. Anitha.

Luận văn được chia làm 2 chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về hàm sinh và phương trình Pell. Chương 2 trình bày về số đa giác, số đa diện và một số bài toán liên quan. Số đa giác và một số tính chất được trình bày ở mục đầu của Chương 2. Nội dung tiếp theo của Chương 2 trình bày về một số bài toán quan trọng liên quan như số tam giác chính phương, Định lý Cauchy về số đa giác, tổng bình phương các số đa giác. Một số số hình học phẳng khác như số đa giác chỉ số âm, số pronic, số gnomonic, số kim cương Aztec cũng được giới thiệu trong chương. Cuối cùng luận văn tìm hiểu sơ lược về số đa diện: số tứ diện và số hình chóp.

Trong quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học khóa Cao học Toán khóa K11 (2017-2019) - trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Lời cuối cùng, tác giả muốn dành để tri ân bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành công việc học tập của mình.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 01 năm 2019

Tác giả

Đinh Thị Thu Hà

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Hàm sinh

Các hàm sinh được dùng để biểu diễn một cách có hiệu quả các dãy bằng cách mã hóa các số hạng của dãy số như hệ số của lũy thừa của một biến x trong một chuỗi lũy thừa hình thức nào đó. Các hàm sinh cũng có thể được dùng để giải nhiều bài toán đếm, chẳng hạn đếm số cách chọn hay phân phối các vật thuộc các loại khác nhau, chịu nhiều ràng buộc hay số cách để đổi một dollar khi dùng các đồng xu có mệnh giá khác nhau. Các hàm sinh cũng có thể được dùng để giải các hệ thức truy hồi bằng cách dịch một hệ thức truy hồi đối với các số hạng của một dãy thành một phương trình của hàm sinh. Các hàm sinh cũng có thể được dùng để chứng minh các hằng đẳng thức tổ hợp bằng cách lợi dụng những mối liên hệ tương đối đơn giản giữa các hàm và chuyển dịch những mối quan hệ này thành hằng đẳng thức liên quan đến các số hạng của các dãy. Những lý do trên giải thích vì sao ta quan tâm đến hàm sinh. Mục này của chương nhắc lại những kiến thức cơ bản của hàm sinh của một dãy số làm kiến thức cơ sở cho Chương 2.

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm sinh đối với dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ của các số thực là chuỗi vô hạn*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Nhận xét 1.1.2. *Hàm sinh đối với dãy $\{a_k\}$ được cho trong Định nghĩa 1.1.1 đôi khi còn được gọi là hàm sinh thông thường của $\{a_k\}$ để phân biệt với các loại hàm sinh khác của dãy này.*

Ví dụ 1. *Hàm sinh của dãy* $\{a_k\}$ *với* $a_k = 3$, $a_k = k+1$, $a_k = 2^k$ *lần lượt là*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k.$$

Ta cũng có thể định nghĩa hàm sinh cho những dãy hữu hạn các số thực bằng cách mở rộng dãy hữu hạn $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thành dãy vô hạn với $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. Hàm sinh $G(x)$ của dãy vô hạn đó là một đa thức bậc n vì không có số hạng nào có dạng $a_j x^j$ với $j > n$, tức là,

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Ví dụ 2. *Hàm sinh của dãy* $1, 1, 1, 1, 1, 1$ *là*

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

Ta có

$$\frac{x^6 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

Do đó $G(x) = \frac{x^6-1}{x-1}$ *là hàm sinh của dãy* $1, 1, 1, 1, 1, 1$.

Ví dụ 3. *Giả sử* m *là một số nguyên dương và* $a_k = C_m^k$ *với* $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. *Hàm sinh của dãy* $a_0, a_1, \ldots, a_m$. *là*

$$G(x) = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots + C_m^m x^m.$$

Theo Định lí nhị thức ta thấy ngay rằng $G(x) = (1+x)^m$.

Khi được dùng để giải các bài toán đếm, các hàm sinh thường được coi như là những chuỗi lũy thừa hình thức. Vấn đề hội tụ của các chuỗi này không được xem xét tại đây. Tuy nhiên, để áp dụng một số kết quả của giải tích, đôi khi việc xem xét đối với những giá trị nào của x thì chuỗi hội tụ cũng là một điều quan trọng. Bây giờ ta sẽ nêu ra một số tính chất của các chuỗi vô hạn có liên quan đến các hàm sinh.

Ví dụ 4. *Hàm* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *là hàm sinh của dãy* $1, 1, \ldots$ *vì*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

với $|x| < 1$.

Ví dụ 5. *Hàm* $f(x) = \frac{1}{1-ax}$ *là hàm sinh của dãy* $1, a, a^2, a^3, \ldots$ *vì*

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots$$

với $|ax| < 1$, *hay* $|x| < \frac{1}{|a|}$ *với* $a \neq 0$.

Chúng ta cũng sẽ cần một số kết quả về việc cộng và nhân hai hàm sinh.

Định lý 1.1.3. *Giả sử*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{và} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Khi đó

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k \quad \text{và} \quad f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k.$$

Ví dụ 6. *Giả sử* $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. *Hãy dùng Ví dụ 4 để tìm các hệ số* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *trong khai triển* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Lời giải. *Từ Ví dụ 4 ta có*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Do đó theo Định lí 1.1.3,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} 1 \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Nhận xét 1.1.4. *Kết quả này cũng có thể được rút ra từ Ví dụ 4 bằng cách lấy vi phân. Lấy đạo hàm cũng là một kĩ thuật hữu ích để tạo ra các hằng đẳng thức mới từ các hằng đẳng thức đã có đối với các hàm sinh.*

Định nghĩa 1.1.5. *Cho* u *là một số thực và* k *là một số nguyên không âm. Khi đó hệ số nhị thức mở rộng được định nghĩa bởi*

$$C_u^k = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-k+1)}{k!} & \text{khi } k > 0, \\ 1 & \text{khi } k = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 7. *Ta có*

$$C_3^{-2} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4;$$

$$C_3^{1/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

Ví dụ 8 dưới đây cho ta một công thức tiện ích để tính các hệ số nhị thức mở rộng khi tham số (u) là một số âm.

Ví dụ 8. *Khi tham số (u) là một số âm, hệ số nhị thức mở rộng có thể được biểu diễn qua các hệ số nhị thức thông thường. Muốn vậy, chú ý rằng*

$$\begin{aligned}
C_{-n}^r &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-r+1)}{r!} \\
&= \frac{(-1)^r n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} \\
&= \frac{(-1)^r (n+r-1)(n+r-2)\dots n}{r!} \\
&= \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= (-1)^r C_{n+r-1}^r.
\end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta có thể phát biểu định lí nhị thức mở rộng.

Định lý 1.1.6 (Định lí nhị thức mở rộng)**.** *Cho x là một số thực với $|x| < 1$. Khi đó*

$$(1+x)^u = \sum_{k=1}^{\infty} C_u^k x^k.$$

Định lí 1.1.6 có thể chứng minh bằng cách dùng chuỗi Maclaurin.

Nhận xét 1.1.7. *Khi u là một số nguyên dương, Định lí nhị thức mở rộng quy về Định lí nhị thức, vì trong trường hợp đó $C_u^k = 0$ nếu $k > u$.*

Ví dụ 9 dưới đây minh họa cách dùng Định lí nhị thức mở rộng khi số mũ là số nguyên âm.

Ví dụ 9. *Dùng Định lí nhị thức mở rộng tìm hàm sinh đối với $(1+x)^{-n}$ và $(1-x)^{-n}$, khi n là số nguyên dương.*

*Lời giải***.** *Theo Định lí nhị thức mở rộng ta có*

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k x^k.$$

Dùng công thức trong Ví dụ 8 ta có

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{n+k-1}^k x^k.$$

Trong biểu thức trên thay x bởi $-x$, ta có

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

Bảng 1.1: Một số hàm sinh thường gặp

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k$	C_n^k
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k a^k x^k$	$C_n^k a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^{rk}$	$C_n^{k/r}$ nếu $r \mid k$; 0 trong các trường hợp khác
$\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$	1 nếu $k \leq n$; 0 trong các trường hợp khác
$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	1
$\dfrac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k$	a^k
$\dfrac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk}$	1 nếu $r \mid k$; 0 trong các trường hợp khác
$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$	$k+1$
$\dfrac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k$	$C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$
$\dfrac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k (-1)^k x^k$	$(-1)^k C_{n+k-1}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^{n-1}$
$\dfrac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k (-1)^k a^k x^k$	$C_{n+k-1}^k a^k = (-1)^k C_{n+k-1}^{n-1} a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$	$\frac{1}{k!}$